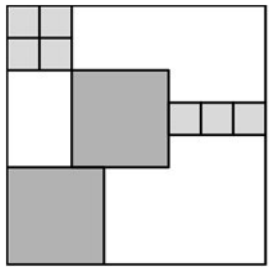
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2019–2020 уч. г.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 7 КЛАСС

Задача 1. Петя написал на доске двузначное число, состоящее из различных цифр. Вася прибавил к числу Пети обе цифры этого числа и результат также написал на доске. Оказалось, что число Васи состоит из тех же цифр, что и число Пети. Приведите пример числа, которое мог написать Петя.

Задача 2. Из квадрата со стороной 16 см вырезали 7 одинаковых маленьких квадратов и 2 одинаковых больших квадрата так, как показано на рисунке. Найдите длину стороны маленького квадрата. (Не забудьте обосновать ответ.)



Задача 3. Поезд из Столицы в город Дальний едет 4 дня. В первый день он проходит 40% всего пути, во второй день — ещё 150 км, в третий день — 30% от *оставшегося* пути и ещё 120 км, и в четвёртый день поезду остаётся проехать последние 90 км. Какое расстояние между Столицей и Дальним?

Задача 4. Приведите пример прямоугольника, который можно разрезать на пять треугольников таких, что у каждого из них есть хотя бы один угол 30°. (Необходимо предъявить способ разрезания этого прямоугольника.)

Задача 5. Денис решил посчитать все машины, припаркованные во дворе. Он утверждает, что иномарок во дворе на 11 больше, чем отечественных машин, а красных машин во дворе на 8 больше, чем синих. Могло ли так оказаться, что все машины во дворе либо красные, либо синие? (Машины бывают двух видов: иномарки и отечественные.)

Задача 6. У Сладкоежки есть 10 сундуков конфет, причём в любых двух из них количество конфет различно. Однажды на улице была плохая погода, поэтому Сладкоежка за раз съел по несколько конфет из каждого сундука. Оказалось, что количество конфет в каждом сундуке уменьшилось либо в два, либо в три, либо в четыре раза. Сразу после этого Сладкоежка записал к себе в блокнот, сколько конфет осталось в каждом из сундуков. Какое наименьшее количество различных чисел он мог записать?

За полное решение каждой задачи даётся 7 баллов.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2019–2020 уч. г.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 8 КЛАСС

Задача 1. Петя выписал на доску пятизначное число, которое делится на 99. А Вася смог вычеркнуть из этого числа одну цифру так, что получившееся четырёхзначное число тоже делится на 99. Приведите пример числа, которое мог выписать Петя, и укажите, какую цифру в нём мог вычеркнуть Вася.

Задача 2. В первом столбце таблицы $n \times n$ закрасили одну клетку, во втором столбце — две, в третьем — три, …, в столбце номер n закрасили n клеток. При каких n от 1 до 8 могло так оказаться, что во всех строках закрашено одинаковое количество клеток?

Задача 3. Прямая ℓ_1 проходит через точки с координатами $(b;0)$ и $(0;a)$, а прямая ℓ_2 проходит через точки с координатами $(a;0)$ и $(0;b)$, причём $b > a > 0$. Докажите, что если прямую ℓ_1 симметрично отразить относительно оси Ox, то полученная прямая будет перпендикулярна прямой ℓ_2.

Задача 4. Может ли сумма первых нескольких ненулевых степеней двойки (вида $2+4+8+\ldots+2^N$) равняться сумме нескольких подряд идущих нечётных чисел?

Задача 5. Волшебная страна населена эльфами и гномами. Известно, что по понедельникам эльфы всегда говорят правду, а по вторникам всегда врут, а гномы — наоборот. В понедельник каждый из жителей страны сказал: «У меня знакомых эльфов на 1 больше, чем знакомых гномов», а во вторник — «Среди незнакомых мне жителей страны эльфов на 1 больше, чем гномов». Могло ли так оказаться, что в волшебной стране 2019 жителей? (Все знакомства взаимны, то есть любые два жителя либо оба знакомы друг с другом, либо нет.)

Задача 6. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Известно, что угол BAC равен $30°$, а угол BMC равен $45°$. Чему равен угол MCB?

За полное решение каждой задачи даётся 7 баллов.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ. 2019–2020 уч. г. МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 9 КЛАСС

Задача 1. В ряд стоят 10 клеток. Можно ли в одну клетку посадить одного кролика, в другую — двух, в третью — трёх, …, в десятую — десять так, чтобы в любых трёх подряд идущих клетках было не более 15 кроликов?

Задача 2. На сторонах BC и AD прямоугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построены равные тупоугольные треугольники BXC и DYA: $BX = DY$, $XC = YA$, BXC и DYA — равные тупые углы. Докажите, что шестиугольник $ABXCDY$ можно разрезать на три параллелограмма.

Задача 3. У нумизмата есть 2019 различных по весу монет. Известно, что любые 20 монет из его коллекции тяжелее, чем любые 19 монет из оставшихся. Могло ли так оказаться, что есть 37 монет таких, что 18 из них тяжелее, чем оставшиеся 19?

Задача 4. Число $n!$ — это произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Какое наименьшее количество чисел (хотя бы одно) можно выбрать из набора $30!, 31!, \ldots, 60!$ так, чтобы их произведение было равно квадрату некоторого натурального числа?

Задача 5. Из Оксфорда в Кембридж одновременно вылетело три почтовых голубя, каждый из них, доставив послание, сразу же полетел обратно. Первый голубь летел быстрее всех и встретил на обратном пути второго голубя в 36 км от Кембриджа, а третьего голубя — в 50 км от Кембриджа. Второй голубь вторым доставил послание и встретил третьего голубя в 16 км от Кембриджа. Чему равно расстояние между Оксфордом и Кембриджем?

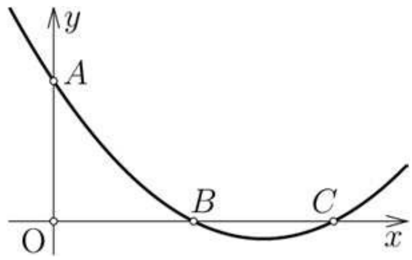
Задача 6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CK. Отмечена точка N такая, что $AMNK$ — параллелограмм. Докажите, что прямая CN перпендикулярна KM.

За полное решение каждой задачи даётся 7 баллов.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2019–2020 уч. г.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 10 КЛАСС

Задача 1. У профессора в пробирке находятся бактерии. Известно, что их не более, чем 2019. Каждый день, если число бактерий в пробирке делится на 100, то оно уменьшается в 100 раз; если же не делится, то число бактерий уменьшается на 1. Какое наибольшее количество бактерий может находиться в пробирке спустя 50 дней?

Задача 2. График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось Oy в точке A, а ось Ox — в точках B и C, как изображено справа. Известно, что $OA = OB = BC$. Укажите все возможные значения, которые может принимать коэффициент b.



Задача 3. Какое наименьшее количество клетчатых квадратов 3×3 можно вырезать из клетчатой доски 17×17 так, чтобы невозможно было вырезать больше ни одного квадрата 3×3?

Задача 4. На столе лежат 2019 монет, первоначально все монеты лежат орлами вверх. Петя и Вася играют в следующую игру: они по очереди переворачивают по одной монете, начинает Петя. Проигрывает тот, после чьего хода повторилась ситуация, которая уже встречалась в игре (включая первоначальную). Кто выиграет при правильной игре?

Задача 5. В остроугольном треугольнике ABC медиана BM и высота CH пересекаются в точке E. Точка K лежит на описанной окружности треугольника ABM, и она диаметрально противоположна точке B. Докажите, что углы ABM и EKM равны.

Задача 6. Сколько существует разбиений доски 2020×2019 (2020 строк и 2019 столбцов) на прямоугольники 3×2 таких, что каждая строка доски пересекает одинаковое количество вертикально расположенных прямоугольников 3×2? (Прямоугольники 3×2 можно поворачивать. Вертикально расположенный прямоугольник 3×2 содержится в двух столбцах и в трёх строках.)

За полное решение каждой задачи даётся 7 баллов.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2019–2020 уч. г.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 11 КЛАСС

Задача 1. Существуют ли три таких ненулевых действительных числа a, b и c, что все три уравнения $ax^2+b=0$, $bx^2+c=0$ и $cx^2+a=0$ имеют решения?

Задача 2. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Оказалось, что угол AMB равен $60°$. На продолжении стороны AC за точку A отмечена точка D такая, что $AD = BM$. Докажите, что треугольник CBD равнобедренный.

Задача 3. Стоимость одной акции фирмы «Рога и копыта» в начале составляла 1 рубль. Каждый следующий день она либо утраивалась, либо увеличивалась на 1 рубль. Спустя 100 дней акция стала стоить 2019 рублей. Могло ли так оказаться, что за эти 100 дней стоимость акции утраивалась ровно 5 раз?

Задача 4. Алёна разбила все натуральные числа от 1 до 2019 на 450 групп. Затем она вычислила произведения чисел в каждой группе и посчитала сумму цифр каждого получившегося произведения. Могла ли Алёна получить 450 одинаковых чисел?

Задача 5. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равно 1, а плоские углы при вершине S равны по $15°$. Точки X, Y, Z отмечены на ребрах SB, SC, SD соответственно. Какое минимальное значение может принимать сумма $AX+XY+YZ+ZA$?

Задача 6. Докажите, что число способов разрезать клетчатую доску 6×7 на трёхклеточные уголки — чётно.

За полное решение каждой задачи даётся 7 баллов.