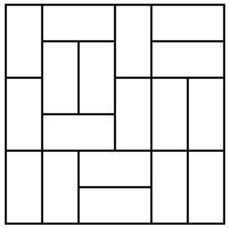
# 7 класс

**Задача 1.** Существует ли семизначное число, состоящее из различных цифр, в котором произведение первых четырёх цифр равно сумме последних четырёх цифр?

**Задача 2.** Денис заполняет таблицу $4 \times 4$ числами так, чтобы сумма чисел в любых двух соседних по стороне клетках была одинаковой. Андрей заметил, что в нижнем левом углу таблицы стоит 20, а в нижнем правом углу таблицы — 19. Чему равна сумма чисел во всей таблице?

**Задача 3.** Марина написала 9 подряд идущих натуральных чисел. Марк стёр все чётные числа. Теперь самое первое число в три раза меньше самого последнего. Какое число Марина написала пятым?

**Задача 4.** Вася выложил из спичек квадрат $6 \times 6$, разбитый на прямоугольники $1 \times 2$ (все спички имеют длину 1):



Затем он переложил несколько спичек так, что получился квадрат $6 \times 6$, разбитый на прямоугольники $1 \times 3$ и квадратики $1 \times 1$. Сколько прямоугольников $1 \times 3$ при этом получилось?

**Задача 5.** Петя расставил в клетки таблицы $6 \times 6$ разноцветные фишки так, что в каждой клетке находится ровно одна фишка, и рядом с каждой фишкой есть хотя бы две фишки того же цвета. (Считается, что две фишки находятся рядом, если они расположены в соседних по стороне клетках). Какое наибольшее количество разноцветных фишек могло быть использовано? (Приведите пример расстановки фишек и докажите, что больше цветов быть не может.)

За полное решение каждой задачи дается 7 баллов.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

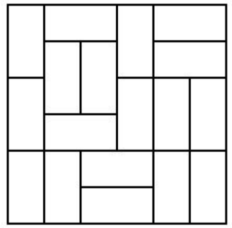
7 класс

**Задача 1.** Существует ли семизначное число, состоящее из различных цифр, в котором произведение первых четырёх цифр равно сумме последних четырёх цифр?

**Задача 2.** Денис заполняет таблицу $4 \times 4$ числами так, чтобы сумма чисел в любых двух соседних по стороне клетках была одинаковой. Андрей заметил, что в нижнем левом углу таблицы стоит 20, а в нижнем правом углу таблицы — 19. Чему равна сумма чисел во всей таблице?

**Задача 3.** Марина написала 9 подряд идущих натуральных чисел. Марк стёр все чётные числа. Теперь самое первое число в три раза меньше самого последнего. Какое число Марина написала пятым?

**Задача 4.** Вася выложил из спичек квадрат $6 \times 6$, разбитый на прямоугольники $1 \times 2$ (все спички имеют длину 1):



Затем он переложил несколько спичек так, что получился квадрат $6 \times 6$, разбитый на прямоугольники $1 \times 3$ и квадратики $1 \times 1$. Сколько прямоугольников $1 \times 3$ при этом получилось?

**Задача 5.** Петя расставил в клетки таблицы $6 \times 6$ разноцветные фишки так, что в каждой клетке находится ровно одна фишка, и рядом с каждой фишкой есть хотя бы две фишки того же цвета. (Считается, что две фишки находятся рядом, если они расположены в соседних по стороне клетках). Какое наибольшее количество разноцветных фишек могло быть использовано? (Приведите пример расстановки фишек и докажите, что больше цветов быть не может.)

За полное решение каждой задачи дается 7 баллов.

# 8 класс

**Задача 1.** Расставьте в выражении

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} : \frac{1}{7} = 35$$

скобки таким образом, чтобы получилось верное равенство.

**Задача 2.** Клоун Сеня катается на велосипеде, у которого три колеса разных размеров. Среднее колесо вдвое больше маленького, а большое колесо втрое больше маленького. Сеня заметил, что за время поездки маленькое колесо сделало на 3000 оборотов больше, чем среднее. Сколько оборотов сделало за время поездки большое колесо?

**Задача 3.** На боковых сторонах $AB$ и $BC$ равнобедренного треугольника $ABC$ отметили точки $E$ и $F$ соответственно. Оказалось, что $BE = EF$. Биссектриса угла $EFC$ пересекает основание $AC$ в точке $K$. Докажите, что $KF = KC$.

**Задача 4.** На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды встретились трое островитян: Джон, Джим и Джек.

— Джим может сказать, что Джек лжец, — заявил Джон.

— Джек может сказать, что Джон лжец, — заявил Джим.

— Джон может сказать, что Джим лжец, — заявил Джек.

Сколько рыцарей среди них может быть? (Укажите все возможные варианты!)

**Задача 5.** Петя расставил числа от 1 до 20 по кругу и для каждых трёх подряд идущих чисел вычислил их сумму. Могут ли 11 из 20 этих сумм оказаться равными?

**Задача 6.** В парусном клубе состоит 9 джентльменов. Каждый день клуб выбирает двоих членов для участия в регате. Члены клуба всегда выигрывают и привозят в клубный музей кубок. Через 350 дней правление клуба выяснило, что одна из пар участников заработала больше кубков, чем любая другая. Какое наименьшее число кубков могла добыть для клубного музея эта пара?

За полное решение каждой задачи дается 7 баллов.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

# 8 класс

**Задача 1.** Расставьте в выражении

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} : \frac{1}{7} = 35$$

скобки таким образом, чтобы получилось верное равенство.

**Задача 2.** Клоун Сеня катается на велосипеде, у которого три колеса разных размеров. Среднее колесо вдвое больше маленького, а большое колесо втрое больше маленького. Сеня заметил, что за время поездки маленькое колесо сделало на 3000 оборотов больше, чем среднее. Сколько оборотов сделало за время поездки большое колесо?

**Задача 3.** На боковых сторонах $AB$ и $BC$ равнобедренного треугольника $ABC$ отметили точки $E$ и $F$ соответственно. Оказалось, что $BE = EF$. Биссектриса угла $EFC$ пересекает основание $AC$ в точке $K$. Докажите, что $KF = KC$.

**Задача 4.** На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды встретились трое островитян: Джон, Джим и Джек.

— Джим может сказать, что Джек лжец, — заявил Джон.

— Джек может сказать, что Джон лжец, — заявил Джим.

— Джон может сказать, что Джим лжец, — заявил Джек.

Сколько рыцарей среди них может быть? (Укажите все возможные варианты!)

**Задача 5.** Петя расставил числа от 1 до 20 по кругу и для каждых трёх подряд идущих чисел вычислил их сумму. Могут ли 11 из 20 этих сумм оказаться равными?

**Задача 6.** В парусном клубе состоит 9 джентльменов. Каждый день клуб выбирает двоих членов для участия в регате. Члены клуба всегда выигрывают и привозят в клубный музей кубок. Через 350 дней правление клуба выяснило, что одна из пар участников заработала больше кубков, чем любая другая. Какое наименьшее число кубков могла добыть для клубного музея эта пара?

За полное решение каждой задачи дается 7 баллов.

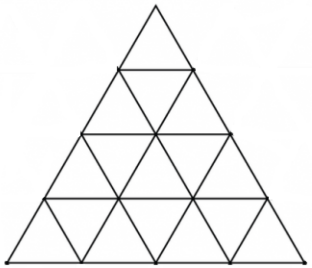
**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

# 9 класс

**Задача 1.** Маша старше своего брата на столько, сколько лет было её брату два года назад. А тринадцать лет назад им с братом вместе было столько лет, сколько сейчас её брату одному. Сколько лет Маше?

**Задача 2.** Существует ли 19–значное число, у которого сумма цифр равна произведению цифр?

**Задача 3.** Правильный треугольник со стороной длины 4 разбит параллельными сторонам линиями на 16 маленьких треугольников со стороной длины 1, как показано на рисунке:



За ход разрешается стереть любую одну сторону у любого из маленьких треугольников. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы у каждого маленького треугольника была стёрта по меньшей мере одна сторона?

**Задача 4.** На доске записаны числа $1, 2, \ldots, n$. Затем одно из чисел стёрли, после чего оказалось, что сумма всех оставшихся чисел равна 100. Какое число стёрли?

**Задача 5.** Точка $M$ является серединой стороны $CD$ квадрата $ABCD$. Из вершины $B$ опустили перпендикуляр $BH$ на прямую $AM$. Докажите, что прямая $AM$ параллельна биссектрисе угла $BCH$.

**Задача 6.** В каждой клетке доски $4 \times 4$ сидит жук. Некто хлопнул в ладоши, и каждый жук в панике перебежал в одну из соседних по стороне клеток доски. Какое наибольшее число пустых клеток могло при этом получиться?

За полное решение каждой задачи дается 7 баллов.

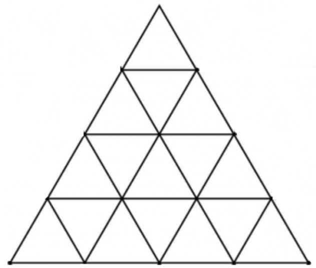
**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

# 9 класс

**Задача 1.** Маша старше своего брата на столько, сколько лет было её брату два года назад. А тринадцать лет назад им с братом вместе было столько лет, сколько сейчас её брату одному. Сколько лет Маше?

**Задача 2.** Существует ли 19–значное число, у которого сумма цифр равна произведению цифр?

**Задача 3.** Правильный треугольник со стороной длины 4 разбит параллельными сторонам линиями на 16 маленьких треугольников со стороной длины 1, как показано на рисунке:



За ход разрешается стереть любую одну сторону у любого из маленьких треугольников. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы у каждого маленького треугольника была стёрта по меньшей мере одна сторона?

**Задача 4.** На доске записаны числа $1, 2, \ldots, n$. Затем одно из чисел стёрли, после чего оказалось, что сумма всех оставшихся чисел равна 100. Какое число стёрли?

**Задача 5.** Точка $M$ является серединой стороны $CD$ квадрата $ABCD$. Из вершины $B$ опустили перпендикуляр $BH$ на прямую $AM$. Докажите, что прямая $AM$ параллельна биссектрисе угла $BCH$.

**Задача 6.** В каждой клетке доски $4 \times 4$ сидит жук. Некто хлопнул в ладоши, и каждый жук в панике перебежал в одну из соседних по стороне клеток доски. Какое наибольшее число пустых клеток могло при этом получиться?

За полное решение каждой задачи дается 7 баллов.

# 10 класс

**Задача 1.** Андрей и Борис бегают по круговой дорожке, причём Андрей бежит по часовой стрелке, а Борис — против. Если Андрей увеличит свою скорость в три раза, мальчики начнут встречаться в полтора раза чаще. Во сколько раз чаще они станут встречаться, если свою скорость увеличит в три раза Борис?

**Задача 2.** Из квадрата $5 \times 5$ вырезали четыре угловые клетки. Сколько существует способов разрезать оставшуюся фигуру на прямоугольники $1 \times 3$?

**Задача 3.** Число называется палиндромом, если оно совпадает с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке. Сколько существует четырёхзначных чисел-палиндромов, делящихся на 15?

**Задача 4.** На координатной плоскости отмечены все точки, у которых обе координаты натуральные и не превосходят 3. За один ход разрешается назвать любые три вещественных числа $a$, $b$ и $c$ ($a \neq 0$) и удалить все отмеченные точки, которые лежат на графике функции $y = ax^2 + bx + c$. За какое наименьшее число ходов можно удалить все отмеченные точки?

**Задача 5.** В стране есть 20 прямых автотрасс. Любые две автотрассы пересекаются, и на их пересечении расположен город. Через город $A$ проходит семь из этих автотрасс, через город $B$ — четыре, через город $C$ — три, а через каждый из оставшихся городов — по две. Сколько городов в этой стране?

**Задача 6.** Биссектрисы углов $B$ и $D$ вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на его диагонали $AC$. На прямой $DA$ отметили точку $E$ такую, что вершина $A$ является серединой отрезка $DE$. Докажите, что описанная окружность треугольника $DBE$ касается прямой $DC$.

За полное решение каждой задачи дается 7 баллов.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

# 10 класс

**Задача 1.** Андрей и Борис бегают по круговой дорожке, причём Андрей бежит по часовой стрелке, а Борис — против. Если Андрей увеличит свою скорость в три раза, мальчики начнут встречаться в полтора раза чаще. Во сколько раз чаще они станут встречаться, если свою скорость увеличит в три раза Борис?

**Задача 2.** Из квадрата $5 \times 5$ вырезали четыре угловые клетки. Сколько существует способов разрезать оставшуюся фигуру на прямоугольники $1 \times 3$?

**Задача 3.** Число называется палиндромом, если оно совпадает с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке. Сколько существует четырёхзначных чисел-палиндромов, делящихся на 15?

**Задача 4.** На координатной плоскости отмечены все точки, у которых обе координаты натуральные и не превосходят 3. За один ход разрешается назвать любые три вещественных числа $a$, $b$ и $c$ ($a \neq 0$) и удалить все отмеченные точки, которые лежат на графике функции $y = ax^2 + bx + c$. За какое наименьшее число ходов можно удалить все отмеченные точки?

**Задача 5.** В стране есть 20 прямых автотрасс. Любые две автотрассы пересекаются, и на их пересечении расположен город. Через город $A$ проходит семь из этих автотрасс, через город $B$ — четыре, через город $C$ — три, а через каждый из оставшихся городов — по две. Сколько городов в этой стране?

**Задача 6.** Биссектрисы углов $B$ и $D$ вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на его диагонали $AC$. На прямой $DA$ отметили точку $E$ такую, что вершина $A$ является серединой отрезка $DE$. Докажите, что описанная окружность треугольника $DBE$ касается прямой $DC$.

За полное решение каждой задачи дается 7 баллов.

# 11 класс

**Задача 1.** Некто выложил по кругу 2019 карточек. Известно, что среди любых трёх подряд идущих карточек есть по меньшей мере две желтые, а среди любых пяти подряд идущих карточек есть по меньшей мере одна красная. Может ли среди этих карточек присутствовать зелёная?

**Задача 2.** Докажите, что при всех значениях параметра $a$ расстояние между корнями квадратного уравнения

$$x^2 + (2a+1)x + (a^2+a) = 0$$

одно и то же.

**Задача 3.** В Учёном Совете состоит 19 профессоров. Однажды каждый из них написал письма 9 членам совета. После этого оказалось, что каждый получил ровно 9 таких писем. Могло ли оказаться, что никакие два учёных не написали друг другу?

**Задача 4.** Натуральное число называется *свободным от кубов*, если ни один из его делителей не является кубом натурального числа, большего единицы. Оля написала на доске 7000 свободных от кубов чисел. Докажите, что по меньшей мере одно из этих чисел имеет простой делитель, больший 20.

**Задача 5.** Внутри треугольника $ABC$ отметили точку $P$. Луч $BP$ пересекает описанную окружность треугольника в точке $R$, а луч $CP$ — в точке $Q$. На стороне $AC$ отметили точку $N$ так, что $\angle CPN = \angle BAQ$. Докажите, что $\angle CRN = \angle BAP$.

**Задача 6.** Средним геометрическим $n$ натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется величина

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

При каком наибольшем натуральном $n$ среднее геометрическое $n$ различных натуральных чисел, не превосходящих 10, может оказаться натуральным числом?

За полное решение каждой задачи дается 7 баллов.

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

# 11 класс

**Задача 1.** Некто выложил по кругу 2019 карточек. Известно, что среди любых трёх подряд идущих карточек есть по меньшей мере две желтые, а среди любых пяти подряд идущих карточек есть по меньшей мере одна красная. Может ли среди этих карточек присутствовать зелёная?

**Задача 2.** Докажите, что при всех значениях параметра $a$ расстояние между корнями квадратного уравнения

$$x^2 + (2a+1)x + (a^2+a) = 0$$

одно и то же.

**Задача 3.** В Учёном Совете состоит 19 профессоров. Однажды каждый из них написал письма 9 членам совета. После этого оказалось, что каждый получил ровно 9 таких писем. Могло ли оказаться, что никакие два учёных не написали друг другу?

**Задача 4.** Натуральное число называется *свободным от кубов*, если ни один из его делителей не является кубом натурального числа, большего единицы. Оля написала на доске 7000 свободных от кубов чисел. Докажите, что по меньшей мере одно из этих чисел имеет простой делитель, больший 20.

**Задача 5.** Внутри треугольника $ABC$ отметили точку $P$. Луч $BP$ пересекает описанную окружность треугольника в точке $R$, а луч $CP$ — в точке $Q$. На стороне $AC$ отметили точку $N$ так, что $\angle CPN = \angle BAQ$. Докажите, что $\angle CRN = \angle BAP$.

**Задача 6.** Средним геометрическим $n$ натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется величина

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

При каком наибольшем натуральном $n$ среднее геометрическое $n$ различных натуральных чисел, не превосходящих 10, может оказаться натуральным числом?

За полное решение каждой задачи дается 7 баллов.