7 КЛАСС

Максимальное время выполнения заданий: 235 мин.
Все задания по 7 баллов.

7.1. Три пирата играли в игру, у каждого из них были монеты. Сначала Билл проиграл и отдал часть своих монет Джеку и Сэму, отчего количества монет у них удвоились. После этого проиграл Джек и отдал часть своих монет Биллу и Сэму, отчего количества монет у них тоже удвоились. Наконец, проиграл Сэм и отдал часть своих монет Биллу и Джеку, у которых опять же количества монет удвоились. Оказалось, что у Сэма и в начале и в конце было 36 монет. Сколько всего монет у пиратов?

7.2. Можно ли разрезать какой-нибудь клетчатый квадрат по линиям сетки на две фигуры одинакового периметра так, чтобы площадь одной из частей оказалась в 4 раза меньше, чем другой?

7.3. Вася и Петя ехали на велосипедах друг другу на встречу: Вася из деревни Ягодной в Грибную, а Петя – из Грибной в Ягодную. Они встретились, когда Вася проехал 12 км и еще треть оставшегося ему до Грибной пути, а Петя проехал 21 км и четверть оставшегося ему пути до Ягодной. Какое расстояние между деревнями Ягодной и Грибной?

7.4. У Незнайки есть семь карточек с цифрами: 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Он хочет составить из них два трёхзначных числа A и B (не используя одну из карточек) так, что $A \cdot B$ делится на 81, а $A + B$ делится на 9. Сколькими способами он может это сделать?

7.5. В заколдованном лесу живут гномы трёх профессий: рудокопы, кузнецы и ювелиры. Рудокопы врут кузнецам, кузнецы врут ювелирам, а ювелиры врут рудокопам. В остальных случаях все говорят правду. Как-то раз на опушке встали в круг 50 гномов из этого леса. Каждый гном повернулся к своему левому соседу и сказал свою профессию. Затем каждый повернулся к своему правому соседу и снова назвал свою профессию. Оказалось, что фраза «Я кузнец» прозвучала ровно 90 раз. Какое наименьшее количество кузнецов могло быть на опушке?

8 КЛАСС

Максимальное время выполнения заданий: 235 мин.
Все задания по 7 баллов.

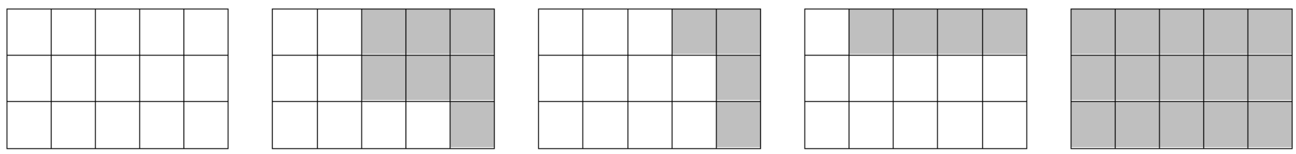
8.1. Числа a, b, c удовлетворяют условию:

$$a + b = a^2 + b^2 = a^3 + b^3 = c.$$

Найдите все возможные значения c, и докажите, что других нет.

8.2. Дан квадрат со стороной 1. Найдите в плоскости квадрата множество точек, удовлетворяющих условию: сумма расстояний от этих точек до диагоналей квадрата равна 2. (Расстояние до диагонали равно расстоянию до прямой, на которой лежит диагональ).

8.3. Костя нарисовал прямоугольник 3×5. Первым ходом Костя отмечал любую клетку прямоугольника, и вырезал её, и все клетки, которые лежат правее, или выше, или выше и правее. Потом он делал то же самое с оставшейся частью, и так продолжалось до тех пор, пока все клетки не были вырезаны. Костя играл несколько раз, а Маша зарисовывала картинки, которые получались после каждого хода. На рисунке показаны 5 таких картинок, возможно, из разных игр (серым закрашены вырезанные части). Сколько всего разных картинок может зарисовать Маша?



8.4. Известно, что число $a^2 + b^2$ делится на 3, a и b – натуральные числа. Найдите остаток от деления на 3 числа $2a^2 + 4ab + 5b^2 + 7a + b + 1$.

8.5. Внутри треугольника ABC с углами $\angle A = \angle C = 65°$ выбрана точка M так, что $\angle AMC = 100°$. На отрезке AM есть такая точка K, что $\angle BKM = 50°$, в этой точке K сидит муха. К мухе ползут два паука, один из точки B, другой из точки C. Какой путь длиннее, BK или CMK?

9 КЛАСС

Максимальное время выполнения заданий: 235 мин.
Все задания по 7 баллов.

9.1. Туристы поселились на два дня в палаточном лагере на Столбах, и взяли с собой воду в одинаковых бутылках. В первый день они выпили 6 бутылок воды, причём всем воды досталось поровну. Несколько человек после этого вернулись домой, а оставшиеся 5 допили взятую воду во второй день, и каждому из них досталось воды вдвое меньше, чем в первый день. Сколько туристов было вначале?

9.2. Найдите число правильных несократимых дробей $\frac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа, произведение которых равно $20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20$.

9.3. Пусть x, y, z – положительные числа. Докажите, что $\frac{x}{y+z} + \frac{y^2}{xz} + \frac{z^2}{xy} \geq 2$.

9.4. Сумма трёх чисел равна 1, и сумма квадратов этих чисел также равна 1. Какое наименьшее значение может принимать самое маленькое из этих трёх чисел?

9.5. Точка O – центр описанной окружности тупоугольного треугольника ABC с углом B, большим 90°. AK и AL – биссектрисы соответственно внутреннего и внешнего углов треугольника ABC при вершине A. Расстояния от O до прямых AK, AL, BC равны 4. Найдите $\angle ABC$.

10 КЛАСС

Максимальное время выполнения заданий: 235 мин.
Все задания по 7 баллов.

10.1. Уравнение $x^2+mx+n=0$ имеет два действительных корня. Числа, обратные к его корням $\left(\frac{1}{x_1}\text{ и }\frac{1}{x_2}\right)$, являются корнями уравнения $x^2+(6m+1)x+(6n+1)=0$. Найдите m и n.

10.2. Коля написал у себя в тетради 4 различных натуральных числа. После этого он выбежал к доске и написал все попарные суммы чисел из тетради. Какое наибольшее количество простых чисел может быть на доске?

10.3. Десять волейбольных команд участвовали в однокруговом турнире (каждая команда играла по одному разу со всеми остальными). В волейболе, если матч заканчивается со счетом $3:0$ или $3:1$, то выигравшая команда получает 3 очка, а проигравшая – 0 очков. Если же матч заканчивается со счетом $3:2$, то команды получают соответственно 2 и 1 очко. Про один из матчей известно, что в нем было сыграно 5 партий. По окончании турнира оказалось, что первая команда опередила вторую на столько же очков, на сколько вторая опередила третью, третья четвёртую, ..., предпоследняя последнюю. Сколько очков набрала команда, занявшая первое место?

10.4. Про положительные числа a, b и c известно, что $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{2}{a+b+c}=1$. Докажите, что $abc\geq 8$.

10.5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, при этом BD – диаметр окружности. Лучи AB и DC пересекаются в точке S. Окружность, проходящая через точки A, O и C, пересекает отрезок CD в точке M, отличной от точки C. Докажите, что M – середина отрезка DS.

11 КЛАСС

Максимальное время выполнения заданий: 235 мин.
Все задания по 7 баллов.

11.1. Какое наибольшее число параллелепипедов $3 \times 1 \times 1$ можно вырезать из куба $5 \times 5 \times 5$?

11.2. Существует ли квадратный трёхчлен с различными корнями x_1 и x_2 и ненулевыми коэффициентами такой, что если переставить какие-то два его коэффициента, получится квадратный трёхчлен с корнями x_1 и $2x_2$?

11.3. Найдите все натуральные решения уравнения $n! = 3^a + 3^b$. (Факториалом натурального числа n называется произведение $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.)

11.4. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки E и F соответственно так, что точки E, F и точки пересечения прямых CE и BF с прямой AD лежат на одной окружности. Докажите, что точки E, F и точки пересечения прямых DE и AF с прямой BC лежат на одной окружности.

11.5. Можно ли натуральные числа от 1 до 2021 раскрасить в 22 цвета так, чтобы для любых четырёх различных одноцветных чисел a, b, c и d **не** выполнялось равенство $a + b = c + d$?