

9 КЛАСС

1. С лесозаготовок в Кежемском районе брёвна в плотах и россыпью сплавляют по Ангаре до лесопунктов Кодинска и Лесосибирска. Из-за постоянного нахождения в воде, по мере впитывания влаги, плотность бревна лиственницы может увеличиться от $\rho_0 = 600 \text{ кг/м}^3$ до $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$. На какую глубину Δh погрузится при этом цилиндрическое бревно радиусом $R = 12 \text{ см}$?

Решение:

Условие равновесия бревна в воде $F_A = mg$

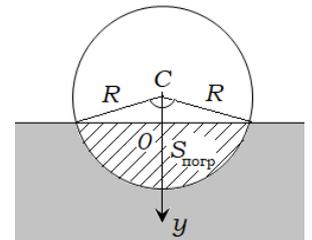
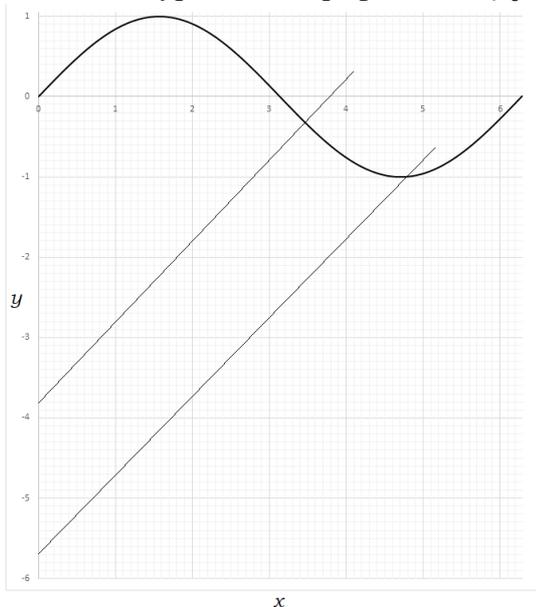
$$\rho_0 g V_{\text{погр}} = \rho g V \rightarrow \frac{V_{\text{погр}}}{V} = \frac{S_{\text{погр}}}{S} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

, где $S_{\text{погр}} = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot \pi R^2 - \frac{R^2}{2} \sin \varphi = \frac{R^2}{2} (\varphi - \sin \varphi)$ – площадь «подводной» части сечения (см. рис.).

Тогда для сухого и мокрого брёвен условия равновесия:

$$\begin{cases} \varphi_0 - \sin \varphi_0 = 2\pi \cdot 0,6 \approx 3,8 \\ \varphi - \sin \varphi = 2\pi \cdot 0,9 \approx 5,7 \end{cases}$$

Решим эти уравнения графически: $\varphi_0 \approx 3,45$ и $\varphi \approx 4,8$



Вертикальная координаты центра бревна относительно уровня воды

$$y_0 = R \cos \frac{\varphi_0}{2} = 0,12 \text{ м} \cdot \cos \frac{3,45}{2} \approx -0,018 \text{ м}$$

$$y = R \cos \frac{\varphi}{2} = 0,12 \text{ м} \cdot \cos \frac{5,7}{2} \approx -0,115 \text{ м}$$

Сдвиг центра $\Delta = y - y_0 = -0,115 \text{ м} - (-0,018 \text{ м}) = -0,097 \text{ м}$

Ответ: бревно погрузится на 9,7 см

Условие равновесия бревна в воде $F_A = mg$	+1 балл
Отношение площадей равно отношению плотностей	+2 балла
Формула для площади «подводной» части сечения	+2 балла
Условия равновесия через геометрические параметры сечения	+1 балл
Графическое решение уравнений	+2 балла
Вычисление глубины погружения	+2 балла

2. По Северному шоссе движутся машины со скоростью $v_1 = 110$ км/ч. Среднее расстояние между ними $l_1 = 42$ м. Из-за сужения дороги возник затор, в котором машины следуют одна за другой со средней скоростью $v_2 = 10$ км/ч через $l_2 = 7$ м. С какой скоростью u будет изменяться длина затора, если автомобиль начинает двигаться равнозамедленно, сразу, как только автомобиль перед ним достигает затора? Считайте машины материальными точками.

Решение:

Перейдём в систему отсчёта затора

Скорость автомобиля в этой системе отсчёта перед началом торможения равна $v_1 - v_2$.

Время достижения автомобилем затора $\tau = \frac{2(l_1 - l_2)}{v_1 - v_2}$.

Каждый автомобиль добавляет к затору длину l_2 .

Однако, за время τ затор продвигается за границу сужения, и уменьшает свою длину на $v_2 \tau$.

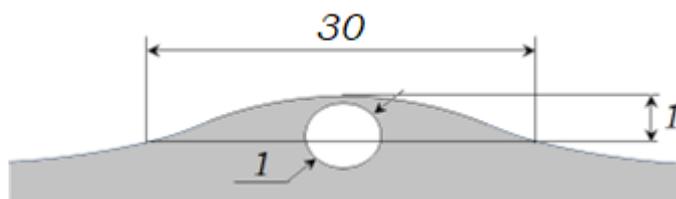
Скорость нарастания длины затора:

$$u = \frac{l_2 - v_2 \tau}{\tau} = \frac{l_2}{2(l_1 - l_2)} (v_1 - v_2) - v_2 = \frac{7 \text{ м}}{2 \cdot (42 \text{ м} - 7 \text{ м})} \cdot \left(110 \frac{\text{км}}{\text{ч}} - 10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}\right) - 10 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 0 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

Ответ: длина затора меняться не будет

Переход в систему отсчёта затора	+1 балл
Время достижения автомобилем затора	+3 балла
Увеличение длины затора при добавлении нового автомобиля	+2 балла
Уменьшение длины затора при добавлении нового автомобиля	+1 балла
Расчёт скорости изменения длины затора	+2 балла
Вывод о том, что затор будет иметь постоянную длину	+1 балл

3. Небольшой плавающий пузырек воздуха искривляет вблизи себя свободную поверхность воды в ванне (см. рис.). На рисунке характерные размеры поперечного сечения пузырька даны в мм. Приближая ее форму сферической, определите, на какой глубине H возникнет изображение лампочки, расположенной на высоком потолке ванной комнаты. Показатель преломления воды $n = 4/3$.



Решение:

Можно считать, что на искривлённую поверхность попадают параллельные пучки световых лучей от дальнего источника. Для определения глубины изображения рассмотрим вертикальный пучок.

Рассмотрим ход луча, упавшего под углом α к нормали к поверхности (см. рис.), и определим глубину H , на котором этот луч пересечётся с лучом, идущим вдоль оси симметрии. Из того, что углы падения малы, все остальные лучи пересекутся на той же глубине, создав изображение источника.

Маленький пузырёк в центре повлияет только на распределения освещённости (создаст вокруг изображения ореол), но не повлияет на положение изображения (пересечения лучей).

По закону Снеллиуса:

$$\sin \alpha = n \sin \beta \quad \rightarrow \quad \alpha \approx n\beta$$

Из треугольника AOB :

$$r = R \sin \alpha \quad \rightarrow \quad r \approx R\alpha$$

Угол C в треугольнике ABC равен $(\alpha - \beta)$

Из треугольника ABC :

$$H = \frac{r}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} \approx \frac{r}{\alpha - \beta} = \frac{R\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{R \frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\alpha}{\beta} - 1} = \frac{Rn}{n - 1} = \frac{R \cdot \frac{4}{3}}{\frac{4}{3} - 1} = 4R$$

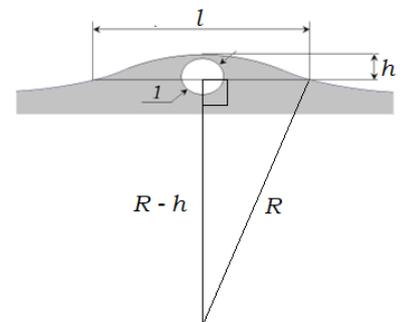
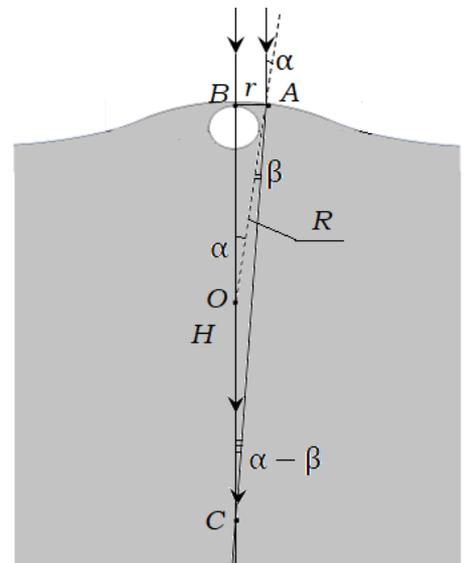
Определим радиус кривизны поверхности с помощью теоремы Пифагора (см. рис.)

$$R^2 = (R - h)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad R = \frac{h}{2} + \frac{l^2}{8h} \approx \frac{l^2}{8h} = \frac{(30 \text{ мм})^2}{8 \cdot 1 \text{ мм}} = 112,5 \text{ мм}$$

Итак, глубина погружения

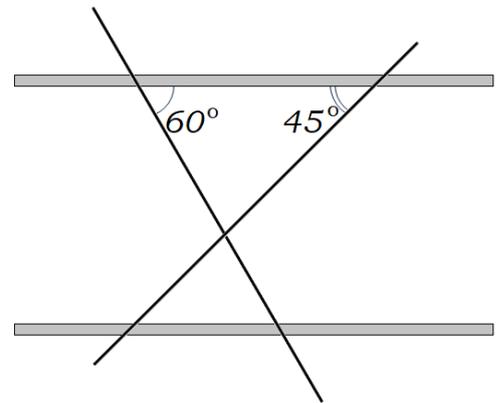
$$H = 4R = 4 \cdot 11,25 \text{ см} = 45 \text{ см}$$

Ответ: 45 см



Указание на параллельность лучей от далёкого источника (можно без обоснования)	+1 балл
Указание на малость углов (можно без обоснования)	+1 балл
Указание на то, что пузырек воздуха не влияет на искомую глубину (без обоснования)	+1 балл
Закон Снеллиуса	+1 балл
Верные геометрические расчёты в треугольнике AOB	+1 балл
Верные геометрические расчёты в треугольнике ABC	+2 балла
Формула для расчёта H через показатель преломления n	+1 балл
Расчёт радиуса кривизны поверхности	+2 балла

4. Расстояние между прямыми параллельными медными проводами равно $l = 5$ см, их длина - $L = 10$ см, их диаметр - $D = 4$ мм. На них кладут стальные прямые проводники диаметром $d = 0,1$ мм. Стальные проводники пересекаются друг с другом, и составляют с медными углы $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 60^\circ$. В местах пересечения проводников имеется электрический контакт. Определите силу тока I , который пойдет по медным проводам, если к их концам приложить напряжение $U = 1,2$ В. Удельное сопротивление меди равно $\rho_M = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, стали - $\rho_C = 9,9 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.



Решение:

Сопротивление медных проводов много меньше сопротивления стальных, т.к. у них существенно больше площадь и меньше удельное сопротивление. Поэтому их сопротивлением пренебрегаем.

Нарисуем эквивалентную схему подключения. Резисторы сопротивлениями R_1, R_2, R_3, R_4 моделируют участки стальных проводников от медного провода до точки пересечения.

Сопротивление стальных проводников пропорционально их длине. Поэтому из подобия треугольников

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$$

Если разомкнуть точку пересечения так, что оказались соединёнными последовательно попарно резисторы сопротивлениями (R_1, R_3) и (R_2, R_4) , то сила тока через проводники не изменится, поскольку потенциалы точек соединения резисторов окажутся равными (их можно снова соединить проводником). Таким образом, ответ не зависит от места пересечения проводников.

Тогда общее сопротивление схемы равно

$$R = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{\rho^2 \left(\frac{L}{S \sin 60^\circ} \right) \left(\frac{L}{S \sin 45^\circ} \right)}{\rho \left(\frac{L}{S \sin 60^\circ} + \frac{L}{S \sin 45^\circ} \right)} = \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \frac{\rho L}{S} = \frac{8}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \frac{\rho L}{\pi d^2}$$

$$R = \frac{8}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \frac{\rho L}{\pi d^2} = \frac{8}{1,41 + 1,73} \cdot \frac{9,9 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{ м} \cdot 0,1 \text{ м}}{3,14 \cdot (10^{-4} \text{ м})^2} \approx 0,8 \text{ Ом}$$

Рассчитаем силу тока по закону Ома:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{1,2 \text{ В}}{0,8 \text{ Ом}} = 1,5 \text{ А}$$

Ответ: 1,5 А

Обоснованное указание на пренебрежение сопротивлением медных проводников	+1 балл
Эквивалентная электрическая схема с точкой пересечения	+1 балл
Эквивалентная электрическая схема без точки пересечения	+1 балл
Обоснование схемы без пересечения	+3 балла
Формула эквивалентного сопротивления через R_i	+1 балл
Использование формулы сопротивления цилиндрического проводника	+1 балл
Использование закона Ома	+1 балл
Верный расчёт ответа	+1 балл

5. На гладком горизонтальном столе находится твёрдая однородная палочка длиной L . В некоторый момент времени один из концов палочки неподвижен. Определите радиус кривизны R траектории другого конца палочки в системе отчёта, связанной со столом. Движение палочки по столу не ограничено.

Решение:

Движение твёрдого тела можно представить как сумму поступательного движения со скоростью некоторой точки и вращательного движения вокруг этой точки.

В рассматриваемый момент времени неподвижная точка палочки является мгновенной осью вращения. Однако, в следующий момент скорость этой точки изменится, а мгновенная ось вращения переместится к другой точке. **Поэтому за ответ $R = L$ нужно ставить сразу 0 баллов!**

Поскольку стол гладкий, импульс сохраняется. Следовательно, центр масс движется с постоянной скоростью.

Можно рассмотреть движение палочки по столу как сумму поступательного движения со скоростью центра масс и вращения вокруг центра масс.

Пусть конец палочки движется со скоростью v . Тогда середина палочки (центр масс) движется со скоростью $v/2$.

Перейдём в инерциальную систему отчёта, связанную с центром масс. Скорости концов палочки будут направлены в противоположные стороны и равны по модулю $v/2$.

Центростремительное ускорение $a = \frac{(v/2)^2}{(L/2)} = \frac{v^2}{2L}$

Ускорение не меняется при переходе от одной инерциальной системы отчёта к другой инерциальной системе отчёта.

Радиус кривизны относительно неподвижной системы отчёта $R = \frac{v^2}{a} = 2L$

Ответ: $2L$

Закон сохранения импульса	+1 балл
Постоянство скорости центра масс	+1 балл
Вычисление модуля скорости центра масс	+1 балл
Представление движения палочки как суммы поступательного и вращательного	+2 балла
Определение скоростей концов палочки в ИСО центра масс	+1 балл
Определение центростремительного ускорения концов палочки	+2 балла
Указание на то, что ускорение не меняется при переходе от одной ИСО к другой ИСО	+1 балл
Вычисление радиуса кривизны в неподвижной системе отчёта.	+1 балл