

11 КЛАСС

Максимальное время выполнения заданий: 235 мин.
Все задания по 7 баллов.

11.1. В окружности провели 6 диаметров. Из 12 концов диаметров случайно выбрали 5, и покрасили эти точки в красный цвет, а остальные 7 концов диаметров покрасили в зеленый цвет. Какова вероятность, что 5 диаметров имеют концы разного цвета?

11.2. Обозначим $A(n)$ сумму простых множителей, в произведение которых разлагается натуральное составное число n . Например, $A(75) = 13$, так как $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$, и $A(75) = 3 + 5 + 5 = 13$. Докажите, что для любого натурального $m \geq 4$ найдётся такое натуральное составное число n , что $A(n) = m$.

11.3. Решите в целых числах уравнение

$$x^3 - xy + 11x^2 + 36x - 2y + 49 = 0.$$

11.4. Квадрат 9×9 разделён на 81 квадратную клетку. В каждой клетке сидит один муравей – красный, чёрный или жёлтый. Муравьи, сидящие в клетках, имеющих общую сторону, считаются соседями. Также соседями считаются муравьи, находящиеся в противоположных концах одной горизонтали или одной вертикали, так что у каждого муравья ровно 4 соседа. Каждый муравей получает бонусы: для красного число бонусов равно удвоенному числу чёрных соседей + утроенному числу жёлтых, для чёрного – удвоенному числу жёлтых соседей + утроенному числу красных, для жёлтого – удвоенному числу красных соседей + утроенному числу чёрных. Какое максимальное значение может принимать сумма S бонусов, полученных всеми муравьями? Покажите, при каком расположении муравьёв это значение достигается.

11.5. В остроугольном треугольнике ABC известно, что $\angle B = 2\angle C$. С центром в точке A построена окружность радиуса AB . Серединный перпендикуляр к отрезку BC пересекает эту окружность внутри треугольника в точке P . Докажите, что $\angle BAC = 3\angle PAC$.