Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2023/24 уч.г.
Математика, 11 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

***Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям**

11.1. В окружности провели 6 диаметров. Из 12 концов диаметров случайно выбрали 5, и покрасили эти точки в красный цвет, а остальные 7 концов диаметров покрасили в зеленый цвет. Какова вероятность, что 5 диаметров имеют концы разного цвета?
Ответ. $\frac{8}{33}$.
Решение. Используем теорему умножения для зависимых событий. Возьмем любую красную точку в качестве первой. Вероятность, что диаметрально противоположная ей точка окажется зелёной, равна $\frac{7}{11}$. Для второй красной точки эта вероятность равна $\frac{6}{9}$, для оставшихся трёх красных точек – $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{5}$ и $\frac{3}{3}$. Искомая вероятность равна $\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{3}=\frac{8}{33}$.
Комментарий. *Любое полное решение задачи – 7 баллов. За каждую арифметическую ошибку снимается 2 балла. Приведен только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.2. Обозначим $A(n)$ сумму простых множителей, в произведение которых разлагается натуральное составное число n. Например, $A(75)=13$, так как $75=3\cdot5\cdot5$, и $A(75)=3+5+5=13$. Докажите, что для любого натурального $m\geq4$ найдётся такое натуральное составное число n, что $A(n)=m$.
Решение. Пусть $m=2k$, $k\geq2$. Возьмем $n=2^k$. Тогда $A(2^k)=2+2+\cdots+2=2k$. Пусть $m=2k+1$, $k\geq2$. Возьмем $n=3\cdot2^{k-1}$. Тогда $A(3\cdot2^{k-1})=3+2(k-1)=2k+1$.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Доказано только для чётного m – 2 балла. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.3. Решите в целых числах уравнение
$$x^3-xy+11x^2+36x-2y+49=0.$$
Ответ. $(-1;\ 23)$, $(-3;\ -13)$, $(11;\ 239)$, $(-15;\ 107)$.
Решение. Запишем уравнение в виде $y=\frac{x^3+11x^2+36x+49}{x+2}$. После замены $t=x+2$ имеем

$$\frac{(t-2)^3+11(t-2)^2+36(t-2)+49}{t}=t^2+5t+4+\frac{13}{t}.$$

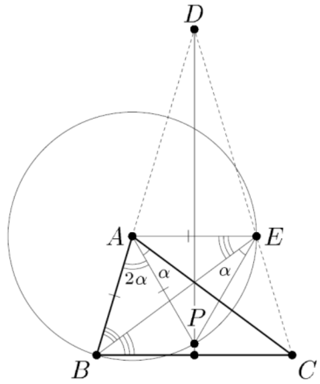
Поскольку y должен быть целым числом, t является делителем 13. При $t=1$ имеем $x=-1$, $y=23$. При $t=-1$: $x=-3$, $y=-13$. При $t=13$: $x=11$, $y=239$. При $t=-13$: $x=-15$, $y=107$.
Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Верная идея решения, но допущены ошибки в преобразовании – 4 балла. Приведён только ответ – 0 баллов.*

11.4. Квадрат 9×9 разделён на 81 квадратную клетку. В каждой клетке сидит один муравей – красный, чёрный или жёлтый. Муравьи, сидящие в клетках, имеющих общую сторону, считаются соседями. Также соседями считаются муравьи, находящиеся в противоположных концах одной горизонтали или одной вертикали, так что у каждого муравья ровно 4 соседа. Каждый муравей получает бонусы: для красного число бонусов равно удвоенному числу чёрных соседей + утроенному числу жёлтых, для чёрного – удвоенному числу жёлтых соседей + утроенному числу красных, для жёлтого – удвоенному числу красных соседей + утроенному числу чёрных. Какое максимальное значение может принимать сумма S бонусов, полученных всеми муравьями? Покажите, при каком расположении муравьёв это значение достигается.
Ответ. 810.
Решение. Рассмотрим красного и чёрного соседей. Чёрный вносит в S число 2, красный вносит 3, вместе они вносят 5. Рассмотрим красного и жёлтого соседей. Красный вносит в S число 2, жёлтый вносит 3, вместе они вносят 5. То же и с парой чёрный и жёлтый. Таким образом, $S=5\cdot N$, где N – число соседей разного цвета. Всего соседей в таблице $\frac{81\cdot 4}{2}=162$, поэтому $S\leq 5\cdot 162=810$. Это значение достигается, если каждая пара соседей состоит из муравьёв разного цвета, что возможно, например, при таком расположении:

Ч	К	Ж	Ч	К	Ж	Ч	К	Ж
К	Ж	Ч	К	Ж	Ч	К	Ж	Ч
Ж	Ч	К	Ж	Ч	К	Ж	Ч	К
Ч	К	Ж	Ч	К	Ж	Ч	К	Ж
К	Ж	Ч	К	Ж	Ч	К	Ж	Ч
Ж	Ч	К	Ж	Ч	К	Ж	Ч	К
Ч	К	Ж	Ч	К	Ж	Ч	К	Ж
К	Ж	Ч	К	Ж	Ч	К	Ж	Ч
Ж	Ч	К	Ж	Ч	К	Ж	Ч	К

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Получена оценка – 5 баллов, приведён пример – 2 балла, баллы суммируются. За рассмотрение неоптимальных примеров баллы не начисляются. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.5. В остроугольном треугольнике ABC известно, что $\angle B=2\angle C$. С центром в точке A построена окружность радиуса AB. Серединный перпендикуляр к отрезку BC пересекает эту окружность внутри треугольника в точке P. Докажите, что $\angle BAC=3\angle PAC$.
Решение. От луча CA отложим угол ACD, равный углу ACB (D – точка пересечения стороны угла и серединного перпендикуляра к стороне BC). Получим равнобедренный треугольник DBC, в котором проведем биссектрису BE. Тогда $ABCE$ – равнобедренная трапеция, в которой диагональ является биссектрисой угла при основании, значит, треугольник ABE – равнобедренный ($AB=AE$). Следовательно, точка E лежит на окружности с центром A и радиусом AB. Так как точки A и E симметричны относительно прямой PD, то равны углы CAP и BEP. Но угол BEP вписан в окружность и опирается на ту же дугу, что и центральный угол BAP. Следовательно, $\angle BAP=2\angle BEP=2\angle PAC$, поэтому, $\angle PAC=\frac{1}{2}\angle BAP=\frac{1}{3}\angle BAC$, что и требовалось доказать.



Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*