**Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2024/25 уч.г.**

**Математика, 10 класс, решения**

**Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35**

**Все задания по 7 баллов**

**Критерии оценивания заданий**

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
| 7 | Полное (верное) решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

***\*Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям***

10.1. Для какого наибольшего натурального существует единственное натуральное , удовлетворяющее неравенству ?

**Ответ.** .

**Решение.** Запишем условие в виде Легко видеть, что удовлетворяет условию, так как неравенство принимает вид а между и находится единственное число, делящееся на , а именно Докажем, что не может быть больше . Если то величина промежутка не меньше а втаком промежутке содержится не меньше двух чисел, кратных .

***Комментарий.*** *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Следующие критерии суммируются. Найден ответ, и показано, что для него существует единственное натуральное*  *– 4 балла; доказано, что*  *не может быть больше* *– 3 балла. Приведён только ответ – 0 баллов.*

10.2. Из выпуклого -угольника удалили три случайно выбранные стороны. Какова вероятность, что хотя бы одна вершина окажется изолированной (то есть не соединенной стороной ни с какой вершиной)?

**Ответ.**

**Решение.** Общее число вариантов равно Пусть удалены последовательные стороны, таких вариантов . Пусть удалены последовательные стороны, а третья сторона не примыкает ни к одной из них; таких вариантов . Искомая вероятность равна

***Комментарий.*** *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Найдено общее число вариантов – 2 балла. Найдено число благоприятных вариантов – 5 баллов. За каждую арифметическую ошибку снижать на 1 балл, за каждую комбинаторную – на 2-3 балла.*

10.3. К Новому году кондитерский магазин приготовил подарочных наборов конфет. Использовалось несколько видов конфет, число конфет в наборе могло быть различным, но каждый набор включал в себя не больше конфеты каждого вида. Все наборы были различны, то есть отличались хотя бы на одну конфету. Не было вида конфет, который был бы включен во все наборов, но в любых двух наборах была одинаковая конфета. Какое наименьшее количество видов конфет могло быть использовано?

**Ответ.** .

**Решение.** Покажем, что видов конфет не могло быть использовано. Из конфет можно образовать различных наборов. При этом наборы образуют пары, дополняющие друг друга до всего множества из конфет. Поскольку больше половины среди наборов обязательно окажутся два набора, дополняющие друг друга до всего множества. Тогда нарушается условие: в любых двух наборах была одинаковая конфета. Если видов конфет , то наборов, удовлетворяющих условию, можно составить, например, так: возьмём все наборы по и по конфет, их 0. Поскольку и больше половины 0, в любых двух наборах будет одинаковая конфета. Однако в наборах, например, одинаковые конфеты (, и нет общей конфеты в этих трёх наборах, поэтому нет общей конфеты и во всех 330 наборах. Остаётся взять наборов из (оставляя три набора, использованных в примере).

***Комментарий.*** *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Получена оценка – 4 балла, приведён пример – 3 балла, баллы суммируются. За рассмотрение неоптимальных примеров баллы не начисляются. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.4. В остроугольном треугольнике проведены высоты и точка – середина стороны . Докажите, что прямая касается окружности, описанной около треугольника

**Решение.** Обозначим точку пересечения высот. Так как , то четырехугольник – вписанный и является диаметром окружности, описанной около треугольника . Обозначим центр этой окружности . Отсюда следует, что точки лежат на одной прямой и эта прямая перпендикулярна (так как продолжение отрезка является третьей высотой). Поэтому . Отрезки и равны, так как это радиусы одной окружности, следовательно, . Тогда . Так как , то четырехугольник – вписанный, и является диаметром описанной окружности, а точка – её центр. Следовательно, , , Таким образом, Отсюда следует, что Следовательно, перпендикулярно радиусу , то есть касается окружности, описанной около треугольника .

***Комментарий.*** *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 6 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.5. Числа положительны и удовлетворяют системе уравнений

Найдите величину

**Ответ.** .

**Решение.** Построим треугольник со сторонами . Выберем в нём точку Обозначим расстояния как По теореме косинусов

Отсюда и Значит, . Аналогично . Площадь треугольника

По формуле Герона Приравнивая, получаем

*Замечание.*

***Комментарий.*** *Любое верное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*