**Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2024/25 уч.г.**

**Математика, 8 класс, решения**

**Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35**

**Все задания по 7 баллов**

**Критерии оценивания заданий**

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
| 7 | Полное (верное) решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

***\*Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям***

8.1. Лиза купила новый шампунь. Флакон старого шампуня стоил $200 $рублей, а новый стоит на $20\%$ дороже. Но зато флакона хватает на срок в полтора раза дольше. Сколько денег сэкономит Лиза к моменту, когда полностью использует два флакона нового шампуня?

**Ответ.** $120 $рублей.

**Решение.** Два флакона нового шампуня стоят $480$ рублей. Их хватает на тот же срок, что и трёх флаконов старого шампуня, за которые Лиза заплатила бы $600 $рублей. Сэкономлено$ 120$ рублей.

***Комментарий.*** *Любое полное решение задачи – 7 баллов. За арифметическую ошибку снимается 3 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

8.2. Из квадрата, сторона которого является целым числом, вырезали несколько непересекающихся квадратиков размером $1×1$. Оказалось, что из вырезанных квадратиков можно составить квадрат. Площадь оставшейся части большого квадрата равна $119$. Чему может равняться сторона квадрата, составленного из вырезанных квадратиков?

**Ответ.** $5 $или $59.$

**Решение.** Обозначим стороны квадратов $a $и $b$. Тогда $a^{2}-b^{2}=119,$ $(a-b)(a+b)=119$. Число $119$ раскладывается в произведение множителей двумя способами: $119=1∙119$, $119=7∙17.$ Получаем две системы $\left\{\begin{matrix}a-b=1, \\a+b=119 \end{matrix}\right.$ и $\left\{\begin{matrix}a-b=7, \\a+b=17. \end{matrix}\right.$ В первом случае $a=60$,$ b=59$. Во втором случае $a=12$, $b=5.$

***Комментарий.*** *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Следующие критерии суммируются. Составлено уравнение* $a^{2}-b^{2}=119 $*– 1 балл;*$ $*приведено к виду* $(a-b)(a+b)=119$ *– 1 балл; число* $119$ *разложено на множители – 1 балл; получены две системы – 2 балла, системы верно решены – 2 балла. Если оба ответа найдены подбором, и не доказано, что других ответов нет – 2 балла. Если подбором найден только один ответ – 1 балл.*

8.3. Число $3576 $представлено в виде суммы двух положительных целых слагаемых, которые можно сложить без переноса цифр в следующий разряд. Каким числом способов это можно сделать? Пары слагаемых $(a, b)$ и $(b, a)$ при $a\ne b $считаются отдельно.

**Ответ.** $1342.$

**Решение.** Число, соответствующее каждой цифре, должно раскладываться в сумму двух слагаемых. Число $3$ можно разложить $4$ способами $(0+3$, $1+2$, $2+1$, $3+0)$. Число $5$ – $6$ способами, число $7$ – $8$ способами, число $6$ – $7$ способами. Число $0$ не является положительным, поэтому варианты $0+3576$, $3576+0$ не подходят под условие задачи. Итого всего способов $4∙6∙8∙7-2=1342$.

***Комментарий.*** *Полное обоснованное решение – 7 баллов. В ответе не исключены варианты* $0+3576$*,* $3576+0$ *– 5 баллов. Верная идея решения, но допущены ошибки при подсчётах числа способов – снимается 1 балл за одну ошибку, 3 балла за две ошибки, 5 баллов за большее число ошибок. Решение начато, есть некоторое продвижение – 1-2 балла. Приведён только ответ – 0 баллов.*

8.4. В треугольнике $ABC$ угол $BAC=45°$, сторона $AB=12$. На стороне $AB$ взята точка $D$ так, что $AD=4$, $∠BDC=60°$. Найдите $∠CBD$.

**Ответ.** $75°.$

**Решение.** Опустим из точки $B$ перпендикуляр $BK$ на отрезок $CD$, и проведём отрезок $AK$. Угол $DBK=30°, $поэтому$ $катет $KD =$ $\frac{BD}{2}=4, $откуда треугольник $AKD$ – равнобедренный, $AD=DK$. Поскольку $∠ADK=180°-60°=120°$, $∠AKD=∠KAD=30°$. Тогда $∠KAC=45°-30°=15°$ и $∠AKC=$ $180°-30°=150°$, $∠ACK=$ $180°-150°-15°=15°. $ Поэтому треугольник $AKC$ – равнобедренный, $AK=CK$. Но и треугольник $AKB$ – равнобедренный, так как углы при основании $AB$ равны $30°. $Следовательно, $AK=KB, $и поэтому $ KB=CK.$ Треугольник $CBK$ равнобедренный и прямоугольный, отсюда $∠CBK=45°,$ а $∠CBD=45°+30°=75°$.

***Комментарий****. Любое полное решение задачи – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 6 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла.*

8.5. На каждой стороне каждой из $6$ карточек записано по одному числу. Петя выкладывает все карточки в ряд (любой стороной вверх), потом складывает числа, которые он видит на первых трёх карточках слева, и вычитает из них сумму чисел, которые он видит на оставшихся трёх карточках справа.

а) Какое наименьшее число он может получить, если пары чисел на карточках таковы: $(18;17),$ $(4;12)$, $(8;11)$, $(1;17)$, $(19; 5)$, $(7; 14)?$

б) Укажите и обоснуйте алгоритм, позволяющий решить такую задачу для любых чисел на $2n$ карточках.

**Ответ.**$ $а) $-38;$ б) $a\_{1}+$ $a\_{2}+…+a\_{n}-b\_{n+1}-b\_{n+2}-…-b\_{2n, }$где карточки ($a\_{i}; b\_{i}$) упорядочены по неубыванию среднего арифметического $a\_{i}$, $b\_{i} и a\_{i}\leq b\_{i}.$

**Решение.** б) Запишем числа ($a, b$) на карточках в порядке возрастания ($a\leq b$). Легко видеть, что для сложения надо использовать меньшие числа ($a)$, для вычитания – большие числа ($b$). Упорядочим карточки по возрастанию (неубыванию) среднего арифметического $\frac{a+b}{2}. $ Ответом будет являться число

$$a\_{1}+a\_{2}+…+a\_{n}-b\_{n+1}-b\_{n+2}-…-b\_{2n. }$$

Обоснование. При замене любого из чисел $a\_{i}$ $(i\leq n)$ на $a\_{k}$ ($k>n)$ сумма изменится на

$$a\_{k }–a\_{i} +b\_{k}-b\_{i}=(a\_{k }+b\_{k})-(a\_{i }+b\_{i})\geq 0. $$

а) Следуя алгоритму, получаем

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$(a;b)$$ | $$(4;12)$$ | $$(1;17)$$ | $$(8;11)$$ | $$(7;14)$$ | $$(5;19)$$ | $$(17;18)$$ |
| $$\frac{a+b}{2}$$ | $$8$$ | $$9$$ | $$9,5$$ | $$10,5$$ | $$12$$ | $$17,5$$ |

$$4+1+8-14-19-18=-38.$$

***Комментарий.*** *Полное обоснованное решение – 7 баллов. а) Найден верный ответ – 1 балл, ответ обоснован – 1 балл. б) Указан верный алгоритм – 3 балла, алгоритм обоснован – 2 балла; баллы суммируются. Если обоснование ответа в пункте а) допускает обобщение (но оно не сделано), то баллы за эту часть повышаются на 1 балл.*