**Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2024/25 уч.г.**

**Математика, 9 класс, решения**

**Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35**

**Все задания по 7 баллов**

**Критерии оценивания заданий**

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
| 7 | Полное (верное) решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

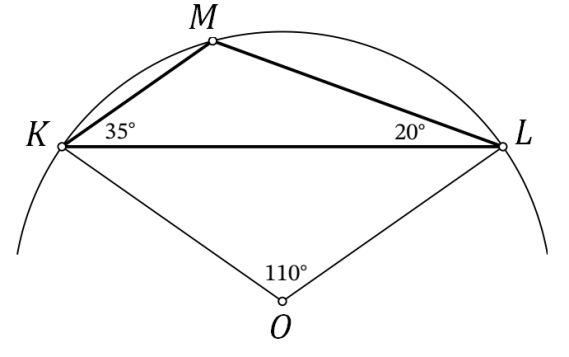
***\*Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям***

9.1. Найдите наибольшее тринадцатизначное натуральное число, делящееся на , в записи которого встречаются все цифр.

**Ответ.** .

**Решение.** Число делится на и на . Сумма десяти цифр равна (делится на ), так что три дополнительные цифры в записи числа в сумме должны дать . Чем старше разряд, тем большую цифру лучше в него ставить, поэтому возьмём три девятки и начнём число так: . Чтобы число делилось на , нужно, чтобы в конце числа стояло , , или . Пятёрка используется в любом случае, и лучше всего выбрать , чтобы оставить для старших разрядов не , а и . В итоге получаем число .

***Комментарий.*** *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Задача верно решена для десятизначного числа – 4 балла. Приведён только верный ответ – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.2. Точка – центр описанной окружности треугольника с углами , и . Докажите, что точки являются вершинами трапеции.

**Решение.** Ясно, что раз угол треугольника тупой, то точки и лежат по разные стороны от прямой . Центральный угол , соответствующий вписанному углу , равен . Внутренний угол интересующего нас четырёхугольника дополняет его до и равен . Так как треугольник равнобедренный, углы и равны по . Теперь можно заметить, что углы и равны по и являются накрест лежащими при прямых и и секущей , то есть прямые и параллельны. С другой стороны, углы и не равны, откуда следует, что прямые и не параллельны. Это означает, что – трапеция (и не параллелограмм).

***Комментарий.*** *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла. За отсутствие доказательства того, что не является параллелограммом, снижать на 1 балл.*

9.3. Квадратное уравнение с целыми коэффициентами и имеет два корня и , где , – различные целые числа. Найдите все значения, которые могут принимать и .

**Ответ.** , .

**Решение.** Числа и являются рациональными. По теореме Виета имеем:

Из первого уравнения следует, что . Тогда из второго уравнения имеем:

Значит, , следовательно, так как они целые и различные, то либо , , либо , . То есть и – корни квадратного трехчлена. Тогда по теореме Виета: , .

***Комментарий.*** *Любое верное обоснованное решение – 7 баллов. Задача сведена к анализу уравнения в целых числах, но дальнейшие продвижения отсутствуют – 4 балла. За арифметические ошибки при верных рассуждениях снижать на 2 балла. Приведён только верный ответ – 0 баллов.*

9.4. В первой строке подряд выписаны числа от до в некотором порядке. Под каждым числом первой строки, кроме самого левого, напишем НОД (наибольший общий делитель) этого числа и его левого соседа. Из полученной таким образом второй строки, состоящей из чисел, аналогично получаем третью строку, состоящую из чисел: под каждым числом второй строки (кроме самого левого) напишем НОД этого числа и его левого соседа и т.д. Этот процесс продолжается до появления строки, состоящей из единиц. Какое наибольшее количество строк может быть выписано?

**Ответ.** .

**Решение.** *Оценка.*Докажем, что в -й строке все числа уже равны . В самом деле, если в ней есть число , то в -й строке есть два числа, кратных , в -й – три таких числа, …, в первой строке есть такое число. Но ни у одного числа нет такого количества кратных среди подряд идущих чисел. Таким образом, больше строки получить нельзя. *Пример.* Расположим в первой строке сначала чётных чисел, а затем нечётных. НОД двух чётных чисел также чётен, поэтому в каждой новой строке количество чисел уменьшается на единицу. Следовательно, в -й строке останется чётное число, поэтому процесс остановится после -й строки.

***Комментарий.*** *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Получена оценка – 4 балла, приведён и обоснован пример – 3 балла, баллы суммируются. Верный пример без обоснования – 2 балла. За рассмотрение неоптимальных примеров баллы не начисляются. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.5. Среди чисел от до Вася выбрал числа-палиндромы с нечётной суммой цифр, а Петя – числа-палиндромы с чётной суммой цифр. У кого из мальчиков оказалось больше чисел и во сколько раз? (Числа-палиндромы читаются одинаково как слева направо, так и справа налево, например, .)

**Ответ.** У Пети больше в раза.

**Решение.** Заметим, что палиндром с цифрами выглядит как , а с цифрами – как . Каждый из этих палиндромов однозначно восстанавливается по первым трём цифрам . Это означает, что и палиндромов с цифрами, и палиндромов с цифрами столько же, сколько чисел от до (т. е. ). Заметим, что любой палиндром с цифрами имеет чётную сумму цифр . А сумма цифр палиндрома с цифрами есть , т. е. зависит только от чётности цифры . Значит, при любых фиксированных и существует пять (чётных) цифр , для которых чётно, и пять (нечётных) цифр , для которых нечётно. Поэтому палиндромов с цифрами, у которых сумма цифр нечётна, столько же, сколько палиндромов с цифрами, у которых сумма цифр чётна (их по ). А значит, палиндромов с цифрами, у которых сумма цифр нечётна, в раза меньше, чем палиндромов с цифрами. Итак, палиндромов от до с чётной суммой цифр больше, чем с нечётной, причём ровно в раза.

***Замечание.*** *Доказать, что палиндромов с чётной суммой цифр больше, можно, установив взаимно однозначное соответствие между пятизначными и шестизначными палиндромами. Например, это можно сделать, сопоставив каждому пятизначному палиндрому шестизначный палиндром . При этом у всех шестизначных палиндромов сумма цифр чётна, а среди пятизначных есть палиндромы с нечётной суммой цифр.*

***Комментарий.*** *Полное обоснованное решение – 7 баллов.**Следующие критерии суммируются. Доказано, что палиндромов с цифрами столько же, сколько палиндромов с цифрами – балла; доказано, что у палиндромов с цифрами сумма цифр чётна – балла; доказано, что количество палиндромов с цифрами, у которых сумма цифр нечётна, равно количеству палиндромов с цифрами, у которых сумма цифр нечётна – балла; доказано, что палиндромов с чётной суммой цифр больше в 3 раза – балл.**Решение начато, есть некоторое продвижение – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*