**Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2024/25 уч.г.**

**Математика, 9 класс, решения**

**Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35**

**Все задания по 7 баллов**

**Критерии оценивания заданий**

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
| 7 | Полное (верное) решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

***\*Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям***

9.1. Найдите наибольшее тринадцатизначное натуральное число, делящееся на $75$, в записи которого встречаются все $10$ цифр.

**Ответ.** $9999876432150$.

**Решение.** Число делится на $3$ и на $25$. Сумма десяти цифр равна $45$ (делится на $3$), так что три дополнительные цифры в записи числа в сумме должны дать $0, 3, 6, …, 27$. Чем старше разряд, тем большую цифру лучше в него ставить, поэтому возьмём три девятки и начнём число так: $9999…$ . Чтобы число делилось на $25$, нужно, чтобы в конце числа стояло $25$, $50$, или $75$. Пятёрка используется в любом случае, и лучше всего выбрать $50$, чтобы оставить для старших разрядов не $0$, а $7$ и $2$. В итоге получаем число $9999876432150$.

***Комментарий.*** *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Задача верно решена для десятизначного числа – 4 балла. Приведён только верный ответ – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.2. Точка $O$ – центр описанной окружности треугольника $KLM$ с углами $∠K=35^{°}$, $∠L=20^{°}$ и $∠M=125^{°}$. Докажите, что точки $K, L, M, O $являются вершинами трапеции.

**Решение.** Ясно, что раз угол $M$ треугольника тупой, то точки $M$ и $O$ лежат по разные стороны от прямой $KL$. Центральный угол $LOK$, соответствующий вписанному углу $LMK$, равен $250^{°}$. Внутренний угол интересующего нас четырёхугольника дополняет его до $360^{°}$ и равен $110^{°}$. Так как треугольник $LOK$ равнобедренный, углы $KLO$ и $LKO$ равны по $90^{°}-\frac{110^{°}}{2}=35^{°}$. Теперь можно заметить, что углы $MKL$ и $KLO$ равны по $35^{°}$ и являются накрест лежащими при прямых $MK$ и $LO$ и секущей $KL$, то есть прямые $MK$ и $LO$ параллельны. С другой стороны, углы $MLK$ и $LKO$ не равны, откуда следует, что прямые $ML$ и $KO$ не параллельны. Это означает, что $OKLM$ – трапеция (и не параллелограмм).

***Комментарий.*** *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла. За отсутствие доказательства того, что* $OKML$ *не является параллелограммом, снижать на 1 балл.*

9.3. Квадратное уравнение $x^{2}+ax+b=0$ с целыми коэффициентами $a$ и $b$ имеет два корня $\left(\frac{1}{k}-2\right)$ и $\left(\frac{1}{m}-2\right)$, где $k$, $m$ – различные целые числа. Найдите все значения, которые могут принимать $a$ и $b$.

**Ответ.** $a=4$, $b=3$.

**Решение.** Числа $\frac{1}{k}-2$ и $\frac{1}{m}-2$ являются рациональными. По теореме Виета имеем:

$$\frac{1}{k}-2+\frac{1}{m}-2=-a\in Z; \left(\frac{1}{k}-2\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)=b\in Z.$$

Из первого уравнения следует, что $k+m=\left(4-a\right)km$. Тогда из второго уравнения имеем:

$$\frac{1-2\left(k+m\right)}{km}=b-4 ⟺ \frac{1-2\left(4-a\right)km}{km}=b-4 ⟺$$

$$⟺ \frac{1}{km}-2\left(4-a\right)=b-4 ⟺ \frac{1}{km}=b-2a+4\in Z.$$

Значит, $km=\pm 1$, следовательно, так как они целые и различные, то либо $k=1$, $m=-1$, либо $k=-1$, $m=1$. То есть $-3$ и $-1$ – корни квадратного трехчлена. Тогда по теореме Виета: $a=4$, $b=3$.

***Комментарий.*** *Любое верное обоснованное решение – 7 баллов. Задача сведена к анализу уравнения* $\frac{1}{km}=b-2a+4$ *в целых числах, но дальнейшие продвижения отсутствуют – 4 балла. За арифметические ошибки при верных рассуждениях снижать на 2 балла. Приведён только верный ответ – 0 баллов.*

9.4. В первой строке подряд выписаны числа от $500$ до $1499$ в некотором порядке. Под каждым числом первой строки, кроме самого левого, напишем НОД (наибольший общий делитель) этого числа и его левого соседа. Из полученной таким образом второй строки, состоящей из $999$ чисел, аналогично получаем третью строку, состоящую из $998$ чисел: под каждым числом второй строки (кроме самого левого) напишем НОД этого числа и его левого соседа и т.д. Этот процесс продолжается до появления строки, состоящей из единиц. Какое наибольшее количество строк может быть выписано?

**Ответ.** $501$.

**Решение.** *Оценка.*Докажем, что в $501$-й строке все числа уже равны $1$. В самом деле, если в ней есть число $d\ne 1$, то в $500$-й строке есть два числа, кратных $d$, в $499$-й – три таких числа, …, в первой строке есть $501$ такое число. Но ни у одного числа $d$ нет такого количества кратных среди $1000$ подряд идущих чисел. Таким образом, больше $501$ строки получить нельзя. *Пример.* Расположим в первой строке сначала $500$ чётных чисел, а затем $500$ нечётных. НОД двух чётных чисел также чётен, поэтому в каждой новой строке количество чисел уменьшается на единицу. Следовательно, в $500$-й строке останется чётное число, поэтому процесс остановится после $501$-й строки.

***Комментарий.*** *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Получена оценка – 4 балла, приведён и обоснован пример – 3 балла, баллы суммируются. Верный пример без обоснования – 2 балла. За рассмотрение неоптимальных примеров баллы не начисляются. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.5. Среди чисел от $10000$ до $999999$ Вася выбрал числа-палиндромы с нечётной суммой цифр, а Петя – числа-палиндромы с чётной суммой цифр. У кого из мальчиков оказалось больше чисел и во сколько раз? (Числа-палиндромы читаются одинаково как слева направо, так и справа налево, например, $11011$.)

**Ответ.** У Пети больше в $3$ раза.

**Решение.** Заметим, что палиндром с $5$ цифрами выглядит как $\overbar{abcba}$, а с $6$ цифрами – как $\overbar{abccba}$. Каждый из этих палиндромов однозначно восстанавливается по первым трём цифрам $\overbar{abc}$. Это означает, что и палиндромов с $5$ цифрами, и палиндромов с $6$ цифрами столько же, сколько чисел $\overbar{abc}$ от $100$ до $999$ (т. е. $900$). Заметим, что любой палиндром с $6$ цифрами имеет чётную сумму цифр $2(a+b+c)$. А сумма цифр палиндрома с $5$ цифрами есть $2(a+b)+c$, т. е. зависит только от чётности цифры $c$. Значит, при любых фиксированных $a$ и $b$ существует пять (чётных) цифр $c$, для которых $2(a+b)+c$ чётно, и пять (нечётных) цифр $c$, для которых $2(a+b)+c$ нечётно. Поэтому палиндромов с $5$ цифрами, у которых сумма цифр нечётна, столько же, сколько палиндромов с $5$ цифрами, у которых сумма цифр чётна (их по $450$). А значит, палиндромов с $5$ цифрами, у которых сумма цифр нечётна, в $2$ раза меньше, чем палиндромов с $6$ цифрами. Итак, палиндромов от $10000$ до $999999$ с чётной суммой цифр больше, чем с нечётной, причём ровно в $3$ раза.

***Замечание.*** *Доказать, что палиндромов с чётной суммой цифр больше, можно, установив взаимно однозначное соответствие между пятизначными и шестизначными палиндромами. Например, это можно сделать, сопоставив каждому пятизначному палиндрому* $\overbar{abcba}$ *шестизначный палиндром* $\overbar{abccba}$*. При этом у всех шестизначных палиндромов сумма цифр чётна, а среди пятизначных есть палиндромы с нечётной суммой цифр.*

***Комментарий.*** *Полное обоснованное решение – 7 баллов.**Следующие критерии суммируются. Доказано, что палиндромов с* $5$ *цифрами столько же, сколько палиндромов с* $6$ *цифрами –* $2$ *балла; доказано, что у палиндромов с* $6$ *цифрами сумма цифр чётна –* $2$ *балла; доказано, что количество палиндромов с* $5$ *цифрами, у которых сумма цифр нечётна, равно количеству палиндромов с* $5$ *цифрами, у которых сумма цифр нечётна –* $2$ *балла; доказано, что палиндромов с чётной суммой цифр больше в 3 раза –* $1$ *балл.**Решение начато, есть некоторое продвижение – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*